DOI:10.11776/j.issn.1000-4939.2025.01.009

广义混合奇异元及应力强度因子分析

贺立,卿光辉

(中国民航大学航空工程学院,300300 天津)

摘 要:采用位移法求解裂纹的应力强度因子,不方便引入裂纹边上已知的应力边界条件,模型有失理性与客观。融合奇异元的思想,提出了用于分析含裂纹二维结构的应力强度因子的广义混合奇异元列式,基于该列式的有限元模型兼顾了裂纹尖端力学参量的奇异性和裂纹边应力边界条件的引入。实例分析表明,该方法的应力强度因子结果收敛稳定可靠。同时分析了应力边界条件对数值结果的影响,结果表明考虑裂纹边应力边界条件时应力强度因子精度更高。

关键词:奇异性;广义混合奇异元;应力强度因子;裂纹;应力边界条件

中图分类号:O343.1 **文献标志码**:A **文章编号**:1000-4939(2025)01-0091-08

Generalized mixed singular element and stress intensity factor analysis

HE Li,QING Guanghui

(School of Aeronautical Engineering,Civil Aviation University of China,300300 Tianjin,China)

Abstract:The known stress boundary conditions cannot be introduced conveniently at the crack edge when solving the stress intensity factor of crack with the displacement method,so the model is unrealistic. Based on the singular element theory,a generalized mixed singular element sequence is proposed to analyze the stress intensity factors of two-dimensional structures with crack. The finite element model based on the singular element sequence takes into account the singularity of mechanical parameters at the crack tip and the introduction of stress boundary conditions at the crack edge. The results of examples show that the convergence of stress intensity factor is stable and reliable. The influence of stress boundary conditions on the numerical results is analyzed,and the results of stress intensity factor considering stress boundary conditions at the edge of crack are more accurate.

Key words:singularity;generalized mixed singular element;stress intensity factor;crack;stress boundary condition

针对裂纹尖端的应力奇异性特征,现有研究已提出多种奇异单元。段静波等[1]总结了位移型、应力型和移动边中节点型等常见奇异单元的优缺点。BARSOUM[2]推导了三角形 1/4 点奇异单元的雅可比矩阵,并且证明这种单元同时具有 $r^{-1/2}$ 阶奇异性和 r^{-1} 阶应变奇异性。CHEN 等[3]提出了一种通过对奇异单元节点的应力强度因子进行线性插值,求得裂纹尖端应力强度因子的方法。LIN 等[4]采用

收稿日期:2022-04-08
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 11502286)
通信作者:卿光辉,教授。E-mail:qingluke@126.com
引用格式:贺立,卿光辉. 广义混合奇异元及应力强度因子分析[J]. 应用力学学报,2025,42(1):91-98.
HE Li,QING Guanghui. Generalized mixed singular element and stress intensity factor analysis[J]. Chinese journal of applied mechanics,2025,42(1):91-98.

1/4 节点裂纹张开位移法和 J 积分法计算奇异单元的应力强度因子,对大范围的平面裂纹扩展进行了有限元模拟。GRAY 等[5]对 1/4 点裂纹尖端单元进行了修正,改进了标准的奇异单元。TAN 等[6]通过将裂纹尖端附近的经典线弹性场解与边界元法的线弹性场解进行比较,得到了求解裂纹体剪切应力的简单公式。NEJATI 等[7]采用 1/4 点四面体单元,准确地模拟了裂纹尖端应力奇异性,应力强度因子的平均误差为 2% ~3% 。FAGEEHI 等[8]在裂纹尖端周围构造了 1/4 点奇异元,采用等效域积分方法计算裂纹扩展过程中的应力强度因子历程,成功地模拟了带孔板和不带孔板的裂纹萌生和扩展过程。

上述文献均采用位移有限元法进行求解。然而,位移法的变量场中仅含有位移变量,单元的应力结果只能通过应力恢复的方法求出。这种按单元来逐一计算应力的方法使得单元间的应力不连续。与之不同,混合法在结构分析中同时取节点位移和节点应力作为独立场变量,同时选择位移函数和应力函数作为基本未知函数,应力结果精度与位移结果精度相当。混合法中包含应力变量,在相同网格下往往可以得到比位移法精度更高的结果。另一方面,混合法便于应力边界条件的引入,有限元模型更加理性客观。然而,传统混合有限元法[9]的系数矩阵主对角线上存在零元素,容易出现数值结果的震荡。广义混合法[10-11]避免了这样的问题,数值结果稳定性更好。QING 等[12-13]结合最小势能原理与(Hellinger-Reissner,H-R)混合变分原理,推导出了广义 H-R 混合变分原理,提出了非协调广义混合有限元法。

前人通过位移法中的奇异单元充分描述了裂纹尖端的应力奇异性特征,但难以考虑到裂纹附近边界上的应力情况对应力强度因子的影响。从理论上讲,广义混合法考虑了裂纹边应力边界条件,可以反映裂纹边的真实应力情况。本研究在文献[10-13]的基础上,将奇异单元与广义混合元法融合,提出了一种求解二维问题裂纹尖端应力强度因子的新方法,并分析考虑裂纹边应力边界条件对数值结果的影响。

1 广义混合元列式

为了解决由于经典混合元线性系统方程组非正定所导致的数值结果不稳定的问题,前人提出了含参数广义混合变分原理[10-13]

$$\Pi_{\mathrm{GHR}} = -\frac{1}{2}(1-\alpha)\int_V \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}V + (1-\alpha)\int_V \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(\nabla \boldsymbol{u})\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\alpha\int_V (\nabla\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(\nabla\boldsymbol{u})\mathrm{d}V - \int_{S_{\sigma}} \bar{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\mathrm{d}S \tag{1}$$

式中:$\boldsymbol{\sigma}$ 为应力向量;$\boldsymbol{C}$ 为材料刚度的系数矩阵;∇为微分算子矩阵;$\boldsymbol{u}$ 为位移向量;$\bar{\boldsymbol{T}}$ 为外载荷。参数 α 的取值范围为 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,当 $\alpha=0$ 时,式(1)等同于 H-R 变分原理;当 $\alpha=1$ 时,式(1)等同于最小势能原理。

对于协调单元而言,位移函数 $\boldsymbol{u}$ 和应力函数 $\boldsymbol{\sigma}$ 可以近似表示为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}_{\mathrm{q}}\boldsymbol{q}_{\mathrm{e}} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{N}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{p}_{\mathrm{e}} \tag{3}$$

式中:$\boldsymbol{q}_{\mathrm{e}}$ 为单元位移向量;$\boldsymbol{p}_{\mathrm{e}}$ 为单元应力向量;二维问题的位移和应力的形函数矩阵 $\boldsymbol{N}_{\mathrm{q}}$、$\boldsymbol{N}_{\mathrm{p}}$ 分别为如下的对角矩阵[12]

$$\mathrm{diag}(\boldsymbol{N}_{\mathrm{q}}) = [\boldsymbol{N}_{\mathrm{e}},\boldsymbol{N}_{\mathrm{e}}]^{\mathrm{T}} \tag{4a}$$

$$\mathrm{diag}(\boldsymbol{N}_{\mathrm{p}}) = [\boldsymbol{N}_{\mathrm{e}},\boldsymbol{N}_{\mathrm{e}},\boldsymbol{N}_{\mathrm{e}}]^{\mathrm{T}} \tag{4b}$$

对于常规八节点四边形单元而言,形函数 $\boldsymbol{N}_{\mathrm{e}}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{N}_{\mathrm{e}} = [N_1,N_2,N_3,N_4,N_5,N_6,N_7,N_8]^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

各分量分别为

$$\begin{cases} N_i = \dfrac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(\xi_0+\eta_0-1), \\ \qquad\qquad i=1,3,5,7(\text{角点}) \\ N_i = \dfrac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_0),\ i=2,6(\text{边中点}) \\ N_i = \dfrac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi_0),\ i=4,8(\text{边中点}) \end{cases} \tag{6}$$

式中:$\xi_0=\xi_i\xi$;$\eta_0=\eta_i\eta$。ξ_i 和 η_i 分别表示节点 i 在等参坐标下的坐标值,取值范围为 -1、0、1。

将式(2)、式(3)代入式(1)中,得到离散形式含参数 α 的广义混合变分原理表达式

$$\Pi_{\mathrm{GHR}}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{e}},\boldsymbol{p}_{\mathrm{e}}) = \sum_{i=1}^{n}\Big[-\frac{1}{2}(1-\alpha)\boldsymbol{p}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{pp}}\boldsymbol{p}_{\mathrm{e}} + (1-\alpha)\boldsymbol{p}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{pq}}\boldsymbol{q}_{\mathrm{e}} + \frac{1}{2}\alpha\boldsymbol{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{qq}}\boldsymbol{q}_{\mathrm{e}} - \boldsymbol{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{e}}\Big] \tag{7}$$

式中:$\boldsymbol{K}_{\mathrm{pp}} = \int_{V_{\mathrm{e}}} \boldsymbol{N}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{N}_{\mathrm{p}}\mathrm{d}V$;$\boldsymbol{K}_{\mathrm{pq}} = \int_{V_{\mathrm{e}}} \boldsymbol{N}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{N}_{\mathrm{q}}\mathrm{d}V$;$\boldsymbol{K}_{\mathrm{qq}} = \int_{V_{\mathrm{e}}}(\nabla\boldsymbol{N}_{\mathrm{q}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(\nabla\boldsymbol{N}_{\mathrm{q}})\mathrm{d}V$;$\boldsymbol{f}_{\mathrm{e}} = \int_{S_{\sigma}}(\bar{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{q}})^{\mathrm{T}}\mathrm{d}S$;$n$ 为总单元数。分别对 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{e}}$ 和 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{e}}$ 进行变分操作,由

$\delta \prod_{GHR}(\boldsymbol{q}_e, \boldsymbol{p}_e) = 0$ 可得广义混合有限元列式。

$$\begin{bmatrix} -(1-\alpha)\boldsymbol{K}_{pp} & (1-\alpha)\boldsymbol{K}_{pq} \\ (1-\alpha)\boldsymbol{K}_{pq}^T & \alpha \boldsymbol{K}_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_e \\ \boldsymbol{q}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{f}_e \end{bmatrix} \tag{8}$$

参数 α (当 $0 < \alpha < 1$ 时)的引入消除了传统混合元列式中系数矩阵对角线上的零元素,有效地避免了数值结果的震荡现象,提高了最终结果的精确性和稳定性。文献[14]证明了使用广义混合有限元法求解时,参数 α 取 0.75 的计算结果最为理想,故本研究所有数值算例均采用此最优值。

2　广义混合奇异元列式

将八节点四边形等参单元中的 1、7、8 节点合并为一个与裂纹尖端重合的节点,然后将 1、2、3 边和 1、6、5 边的中间节点移动到距离裂尖 1/4 边长处,构造出三角形 1/4 点奇异单元[15](图 1)。

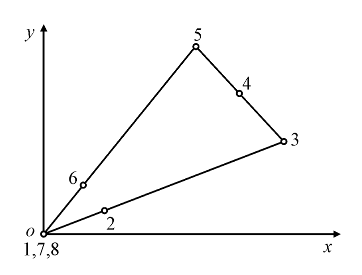


图 1　三角形 1/4 点奇异单元

Fig. 1　Triangular quarter point singular element

图 1 中节点 2、6 分别在距离裂尖 1/4 边长的两条边上,节点 4 在中点处,由此可知

$$\begin{cases} x_1 = x_7 = x_8 = y_1 = y_7 = y_8 = 0 \\ x_2 = x_3/4, y_2 = y_3/4 \\ x_4 = (x_3 + x_5)/2, y_4 = (y_3 + y_5)/2 \\ x_6 = x_5/4, y_6 = y_5/4 \end{cases} \tag{9}$$

将式(6)和式(9)代入等参单元坐标变换式 $x = \sum N_i x_i$ 和 $y = \sum N_i y_i$ 得

$$\begin{cases} x = \left(\frac{1}{4}N_2 + N_3 + \frac{1}{2}N_4\right)x_3 + \\ \quad \left(\frac{1}{4}N_4 + N_5 + \frac{1}{2}N_6\right)x_5 \\ y = \left(\frac{1}{4}N_2 + N_3 + \frac{1}{2}N_4\right)y_3 + \\ \quad \left(\frac{1}{4}N_4 + N_5 + \frac{1}{2}N_6\right)y_5 \end{cases} \tag{10}$$

化简得

$$\begin{cases} x = \frac{1}{8}[(1-\eta)x_3 + (1+\eta)x_5](1+\xi)^2 \\ y = \frac{1}{8}[(1-\eta)y_3 + (1+\eta)y_5](1+\xi)^2 \end{cases} \tag{11}$$

由式(11)可得雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 及其行列式

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1+\xi)}{4}[(1-\eta)x_3 + (1+\eta)x_5] & \frac{(1+\xi)}{4}[(1-\eta)y_3 + (1+\eta)y_5] \\ \frac{(1+\xi)^2}{8}(-x_3 + x_5) & \frac{(1+\xi)^2}{8}(-y_3 + y_5) \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$|\boldsymbol{J}| = \frac{1}{16}(1+\xi)^3(x_3y_5 - x_5y_3) \tag{13}$$

图 1 中奇异单元的面积可表示为

$$\mathrm{d}V = |\boldsymbol{J}|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{14}$$

将式(13)代入式(14)得

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{16}(1+\xi)^3(x_3y_5 - x_5y_3)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{15}$$

因此,对裂纹尖端的奇异单元采用以下公式计算式(8)中的 $\boldsymbol{K}_{pp}$、$\boldsymbol{K}_{pq}$、$\boldsymbol{K}_{qq}$ 即为

$$\boldsymbol{K}_{pp} = \frac{(x_3y_5 - x_5y_3)}{16}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \boldsymbol{N}_p^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{N}_p (1+\xi)^3 \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{16a}$$

$$\boldsymbol{K}_{pq} = \frac{(x_3y_5 - x_5y_3)}{16}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \boldsymbol{N}_p^T \nabla \boldsymbol{N}_q (1+\xi)^3 \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{16b}$$

$$\boldsymbol{K}_{qq} = \frac{(x_3y_5 - x_5y_3)}{16}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (\nabla \boldsymbol{N}_q)^T \boldsymbol{C} (\nabla \boldsymbol{N}_q)(1+\xi)^3 \cdot \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{16c}$$

将式(16)代入式(18),即可得到广义混合奇异元列式

3　算例分析

本研究所有算例的结果均是通过自行编写的 Mathematica 软件代码计算得出。

3.1 应力强度因子的收敛性分析

如图2(a)所示,长 $2H = 120$ mm、宽 $2W = 100$ mm的各向同性、线弹性均质薄板,含有长 $2a = 20$ mm的中心贯穿裂纹,板两端承受对称的均匀拉应力 $\sigma = 10$ MPa。材料弹性模量 $E = 2\times10^5$ MPa,泊松比 $\upsilon = 0.3$。1/4 模型及边界条件如图2(b)。

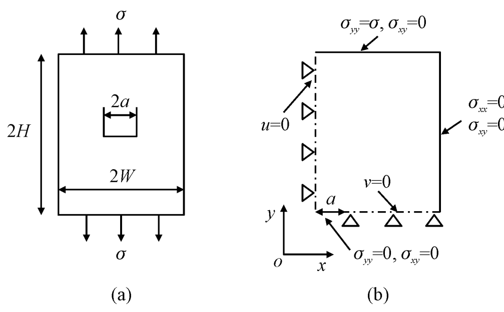


图2 中心裂纹薄板模型及边界条件

Fig. 2 Model and boundary conditions of thin plate with center crack

如图2(b)所示,模型底部无裂纹区域 $v = 0$;左侧对称边界上 $u = 0$,模型上边界 $\sigma_{xy} = 0$, $\sigma_{yy} = \sigma$;底部裂纹边上的(不包括裂纹尖端的节点) $\sigma_{xy} = 0$, $\sigma_{yy} = 0$;模型右侧边界上 $\sigma_{xy} = 0$, $\sigma_{xx} = 0$。1/4 模型中靠近裂纹尖端处的部分网格如图3所示。

图3中的6种不同单元长度的网格模型是通过Abaqus软件建立的。采用近似全局尺寸技术将常规单元长度分别设置为6.4、4.0、3.2、2.4、1.6、0.8 mm。

裂尖奇异单元(图4)A、B 2点的等参坐标分别为(0,1)和(1,1),将广义混合奇异元法得到的 A、B 2点的位移结果 v_A 和 v_B 代入式(17)[3]求出 K_{I}

$$K_{\mathrm{I}} = \frac{E(8v_A - v_B)}{3(\kappa+1)(1+\upsilon)}\sqrt{\frac{2\pi}{L}} \tag{17}$$

式中,L 为奇异单元的径向边长,本研究所有算例均取 $L = a/10$。

κ 取值如下

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\upsilon \ (\text{平面应变}) \\ \dfrac{3-\upsilon}{1+\upsilon} \ (\text{平面应力}) \end{cases} \tag{18}$$

6种模型的应力强度因子结果误差变化情况如图5所示,其中解析解按下式[16]计算

$$K_{\mathrm{I}} = F\sigma\sqrt{\pi a} \tag{19}$$

式中 F 取值如下

$$F = \frac{1 - 0.5\dfrac{a}{W} + 0.326\left(\dfrac{a}{W}\right)^2}{\sqrt{1-\dfrac{a}{W}}} \tag{20}$$

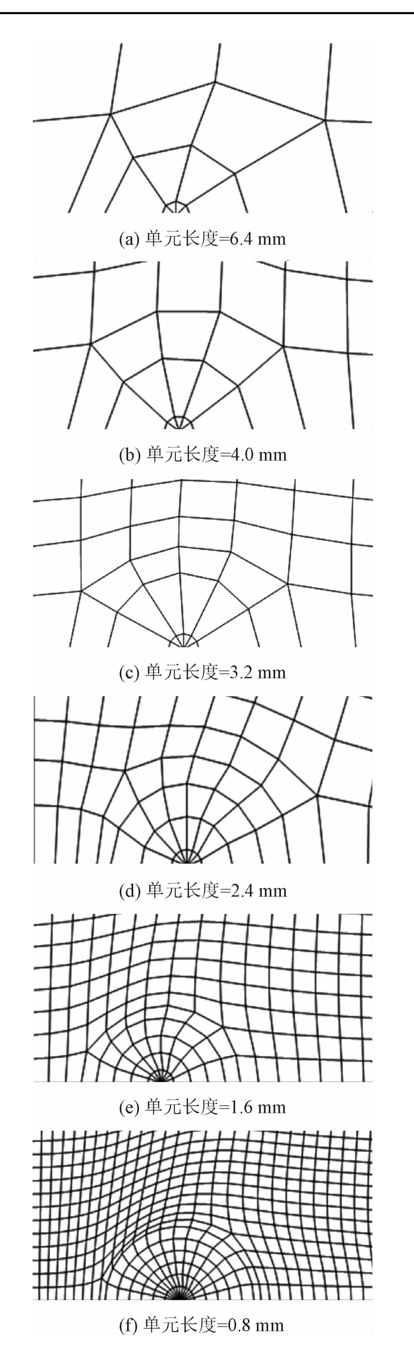


图3 不同单元长度的模型

Fig. 3 Models of different element length

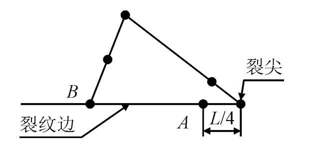


图4 裂尖奇异单元

Fig. 4 Singular element at crack tip

误差计算公式

$$\text{误差} = \frac{|\text{本研究方法} - \text{解析解}|}{\text{解析解}}\times100\% \tag{21}$$

从图 5 中可以看出,当 α =0.1 或 0.9 时,应力强度因子的收敛性和精确度均较差。当 α =0.5 时,在最密的网格模型 f 处发生了反向收敛的情况。当 α =0.75 时,随着网格密度不断加大,数值结果的误差不断变小,最后接近解析解:由网格模型 a 得到的应力强度因子误差为 13.32%,网格模型 f 的计算误差为 0.24%。图 5 中的结果验证了文献[14]中提到的参数 α 取 0.75 时计算结果最为理想的结论,也证明了采用本研究提出的广义混合奇异元法求解应力强度因子具有良好的收敛性,数值结果稳定可靠。

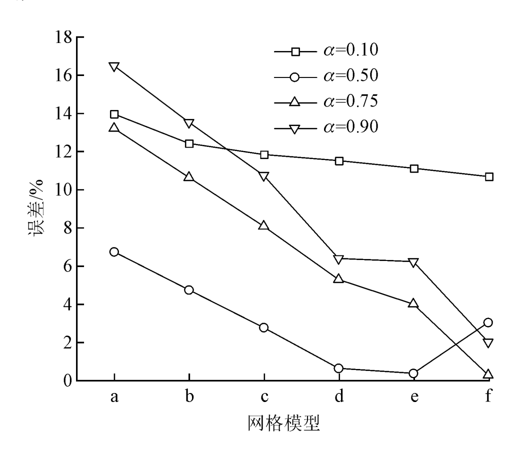


图 5　应力强度因子的收敛性

Fig. 5　Convergence of stress intensity factor

3.2　考虑裂纹边应力边界条件对中心裂纹的影响

这里再次考虑图 2 所示的中心裂纹薄板问题,计算不同 a/W 条件下的应力强度因子结果。模型(图 2a)参数: $E=2\times10^5$ MPa; $\upsilon=0.3$; $\sigma=100$ MPa; $2H=240$ mm; $2W=200$ mm; 裂纹半长 a 分别取 10、12、14、16、18、20 mm,裂纹尖端附近的网格模型如图 6。考虑和不考虑裂纹边应力边界条件 2 种情况的应力强度因子结果及误差列于表 1 中。

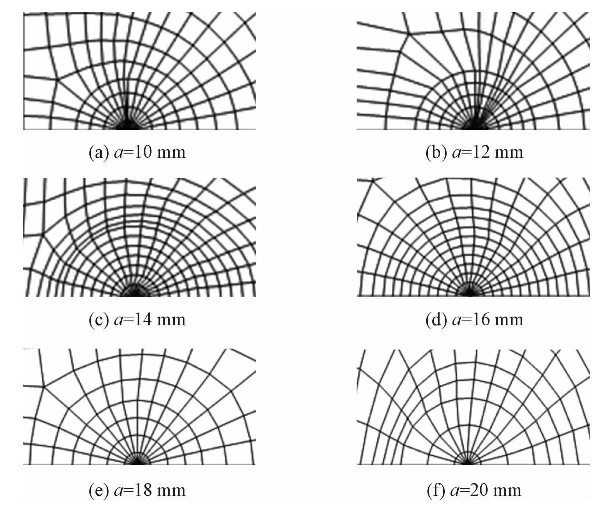


图 6　不同裂纹长度的模型(a =10、12、14、16、18、20 mm)

Fig. 6　Models of different crack length (a =10,12,14,16,18,20 mm)

表 1　不同 a/W 条件下的 K_{I} (a/W =0.10、0.12、0.14、0.16、0.18、0.20)

Tab. 1　Results of K_{I} in different a/W (a/W =0.10,0.12,0.14,0.16,0.18,0.20)

a/W	本研究方法				位移法 K_{I} / ($\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{mm}}$)	位移法误差/%	解析解 K_{I} / ($\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{mm}}$)
	考虑应力边界条件 K_{I} /($\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{mm}}$)	考虑应力边界条件误差/%	不考虑应力边界条件 K_{I} /($\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{mm}}$)	不考虑应力边界条件误差/%			
0.10	561.61	0.28	561.14	0.37	546.78	2.92	563.20
0.12	617.99	0.05	617.44	0.14	601.61	2.70	618.32
0.14	667.46	0.33	666.72	0.44	649.43	3.02	669.64
0.16	714.82	0.46	713.96	0.58	694.75	3.26	718.13
0.18	763.43	0.13	762.66	0.24	741.54	3.00	764.46
0.20	802.49	0.82	801.62	0.93	777.13	3.96	809.16

由表 1 可知:考虑裂纹边应力边界条件时得到的应力强度因子的误差比未考虑时更小,说明通过本研究的方法考虑裂纹边应力边界条件可以提高应力强度因子的计算精度;无论是否考虑裂纹边应力边界条件,广义混合奇异元法的计算误差均在 1%以内,远好于相同网格下的位移法的结果,说明广义混合奇异元模型真实可靠。

3.3　考虑裂纹边应力边界条件对单边裂纹的影响

如图 7(a)所示,平面内长 $H=10$ mm、宽 $W=6$ mm的均质薄板,左侧含有长为 a 的水平单边直裂纹,板两端承受对称的均匀拉应力 $\sigma=30$ MPa。设 $E=2\times10^5$ MPa, $\upsilon=0.3$。1/2 模型及边界条件如图 7(b)所示。

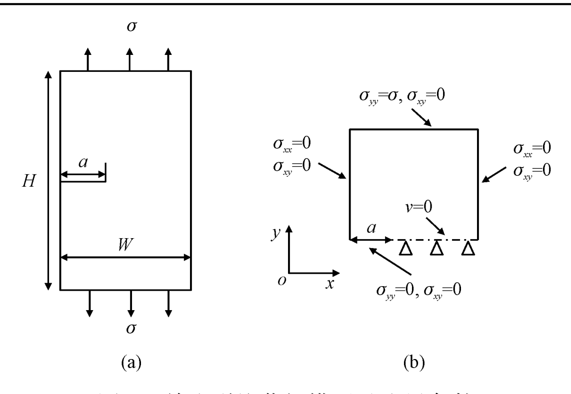


图7　单边裂纹薄板模型及边界条件

Fig. 7　Model and boundary conditions of thin plate with single edge crack

如图7(b),模型底部无裂纹区域 $v=0$,模型上边界 $\sigma_{xy}=0$, $\sigma_{yy}=\sigma$;底部裂纹边上(不包括裂纹尖端的节点)的 $\sigma_{xy}=0$, $\sigma_{yy}=0$;模型左侧和右侧边界上 $\sigma_{xy}=0$, $\sigma_{xx}=0$。对于该算例中的单边裂纹,式(18)中的 F 取值如下[16]

$$F=1.12-0.23\frac{a}{W}+10.6\left(\frac{a}{W}\right)^{2}-21.7\left(\frac{a}{W}\right)^{3}+30.4\left(\frac{a}{W}\right)^{4}\qquad(22)$$

下面在不同 a/W 条件下分别计算是否考虑裂纹边应力边界2种情况下的应力强度因子,a 分别取0.6、1.2、1.8、2.4、3.0 mm,裂纹尖端附近的网格模型如图8所示。计算结果在表2中列出。

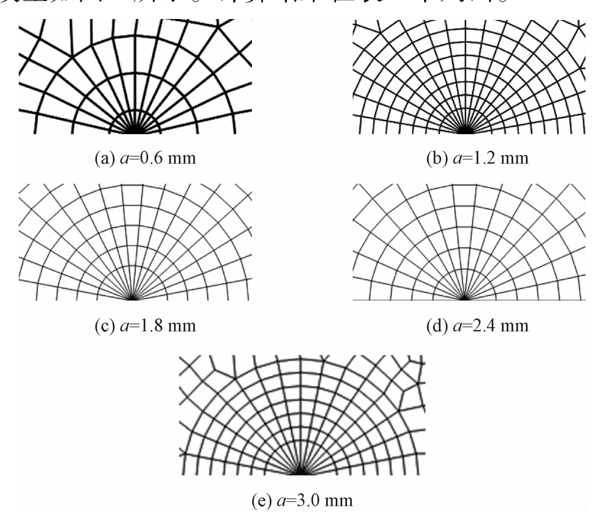


图8　不同裂纹长度的模型($a=0.6$、1.2、1.8、2.4、3.0 mm)

Fig. 8　Models of different crack length ($a=0.6$, 1.2, 1.8, 2.4, 3.0 mm)

根据表2中可以得到与表1相似的结论,即考虑裂纹边应力边界条件时可以得到精度更高的应力强度因子结果。同时,在相同网格的条件下广义混合奇异元法的结果总是优于位移法。

表2　不同 a/W 条件下的 K_{I} ($a/W=0.1$、0.2、0.3、0.4、0.5)

Tab. 2　Results of K_{I} in different a/W ($a/W=0.1$, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5)

a/W	本研究方法				位移法 K_{I} / (MPa$\sqrt{\mathrm{mm}}$)	位移法误差/%	解析解 K_{I} / (MPa$\sqrt{\mathrm{mm}}$)
	考虑应力边界条件 K_{I} / (MPa$\sqrt{\mathrm{mm}}$)	考虑应力边界条件误差/%	不考虑应力边界条件 K_{I} / (MPa$\sqrt{\mathrm{mm}}$)	不考虑应力边界条件误差/%			
0.1	48.133	1.33	48.086	1.42	46.855	3.95	48.78
0.2	79.537	0.55	79.465	0.64	77.650	2.91	79.98
0.3	118.160	0.55	118.050	0.64	115.220	3.02	118.81
0.4	172.420	0.96	172.230	1.07	167.700	3.68	174.10
0.5	258.310	1.33	258.010	1.44	251.470	3.94	261.79

3.4　考虑裂纹边应力边界条件对斜裂纹的影响

中心斜裂纹拉伸板(图9a)几何尺寸比为:$a/W=0.4$; $H/W=2$;裂纹倾斜角 $\theta=45°$。其应力强度因子的解析解根据文献[17]得到。

模型的应力边界条件如图9(b)所示,模型上下边界 $\sigma_{xy}=0$,$\sigma_{yy}=\sigma$;中心处裂纹边上(不包括裂纹尖端的节点)的 $\sigma_{xy}=0$;左右侧边界上 $\sigma_{xy}=0$,$\sigma_{xx}=0$。

该算例用到的网格模型的裂纹尖端局部示意图如图10所示。

文献[5]给出了适用于斜裂纹裂尖奇异单元(图11)的 K_{I} 、K_{II} 计算公式

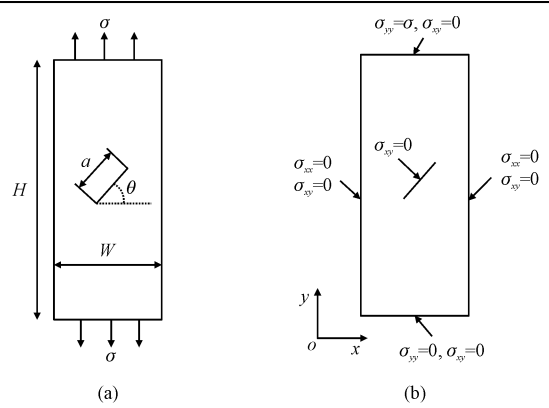


图9　斜裂纹薄板模型及边界条件

Fig. 9　Thin plate model with oblique crack and boundary conditions

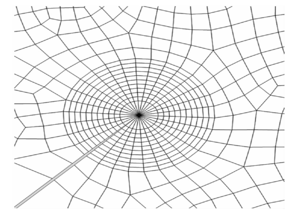


图 10　裂尖网格示意图

Fig. 10　Mesh diagram of crack tip

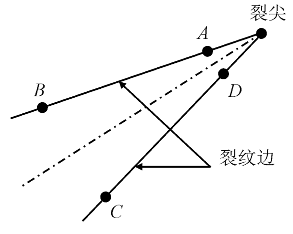


图 11　斜裂纹裂尖示意图

Fig. 11　Schematic diagram of oblique crack tip

$$K_{\mathrm{I}} = \frac{E(8\Delta\bar{v}_A - \Delta\bar{v}_B)}{6(\kappa+1)(1+\upsilon)}\sqrt{\frac{2\pi}{L}} \tag{23a}$$

$$K_{\mathrm{II}} = \frac{E(8\Delta\bar{u}_A - \Delta\bar{u}_B)}{6(\kappa+1)(1+\upsilon)}\sqrt{\frac{2\pi}{L}} \tag{23b}$$

式中,$\Delta\bar{v}_A$、$\Delta\bar{v}_B$、$\Delta\bar{u}_A$、$\Delta\bar{u}_B$ 为局部坐标系下的节点相对位移。全局坐标系和局部坐标系的节点相对位移转换关系为[18]

$$\Delta\bar{v} = -\Delta u\sin\theta + \Delta v\cos\theta \tag{24a}$$

$$\Delta\bar{u} = \Delta u\cos\theta + \Delta v\sin\theta \tag{24b}$$

将上式和 $\theta = 45°$ 代入式(23)得到本例中的 K_{I}、K_{II} 计算公式(25)。无量纲应力强度因子结果如表 3 所示。

$$K_{\mathrm{I}} = \frac{E[8(v_A - v_D - u_A + u_D) - (v_B - v_C - u_B + u_C)]}{6(\kappa+1)(1+\upsilon)}\sqrt{\frac{\pi}{L}} \tag{25a}$$

$$K_{\mathrm{II}} = \frac{E[8(v_A - v_D + u_A - u_D) - (v_B - v_C + u_B - u_C)]}{6(\kappa+1)(1+\upsilon)}\sqrt{\frac{\pi}{L}} \tag{25b}$$

表 3　斜裂纹的无量纲应力强度因子及误差

Tab. 3　Dimensionless stress intensity factor and error of oblique crack

应力强度因子结果	本研究方法				位移法 $K/(\sigma\sqrt{\pi a})$	位移法误差/%	解析解 $K/(\sigma\sqrt{\pi a})$
	考虑应力边界条件 $K/(\sigma\sqrt{\pi a})$	考虑应力边界条件误差/%	不考虑应力边界条件 $K/(\sigma\sqrt{\pi a})$	不考虑应力边界条件误差/%			
K_{I} 结果	0.568 8	0.54	0.567 3	0.80	0.549 9	3.85	0.571 9
K_{II} 结果	0.534 7	1.08	0.535 5	1.23	0.505 5	4.44	0.529 0

由表 3 可知,无论是 K_{I} 还是 K_{II},考虑裂纹边应力边界条件时的数值结果比未考虑时精度更高。

4　结束语

结合广义混合法的理论,本研究提出了一种融合奇异元的广义混合奇异元列式,基于该列式的有限元模型在求解二维问题的应力强度因子时可考虑裂尖力学量的奇异性和裂纹边的应力边界条件。实例分析表明,通过该方法得到的应力强度因子具有良好的收敛性,结果精度高。

无论是否考虑裂纹边应力边界条件,基于广义混合奇异元法得到的应力强度因子误差均在 1% 左右,好于相同网格下的位移法结果。而在考虑裂纹边应力边界条件后的结果更加优于未考虑应力边界条件的结果,主要原因是广义混合奇异元法可以反映裂纹边的真实应力情况,有限元模型更加理性客观。

比较有限元模型的自由度数,由于混合法包含了应力变量,所以在网格模型相同的情况下,混合法的自由度数比位移法多,因此求解速度比位移法慢。虽然现代计算机技术的发展水平已经不再是制约具有诸多优点的混合法得到广泛应用的因素,但是研究探索提高混合法计算效率的新方法是非常有意义的工作。

参考文献:

[1]　段静波,李道奎,雷勇军. 断裂力学分析的奇异有限元法研究综述[J]. 机械强度,2012,34(2):262-269.

DUAN Jingbo,LI Daokui,LEI Yongjun. Advances in singular finite element method for fracture mechanics analysis[J]. Journal of mechanical strength,2012,34(2):262-269(in Chinese).

[2]　BARSOUM R S. Triangular quarter-point elements as elastic and

perfectly-plastic crack tip elements[J]. International journal for numerical methods in engineering,1977,11(1):85-98.
[3] CHEN L S,KUANG J H. A modified linear extrapolation formula for determination of stress intensity factors[J]. International journal of fracture,1992,54(1):R3-R8.
[4] LIN X B,SMITH R A. An improved numerical technique for simulating the growth of planar fatigue cracks[J]. Fatigue & fracture of engineering materials & structures,1997,20(10):1363-1373.
[5] GRAY L J,PHAN A V,PAULINO G H,et al. Improved quarter-point crack tip element[J]. Engineering fracture mechanics,2003,70(2):269-283.
[6] TAN C L,WANG X. The use of quarter-point crack-tip elements for T-stress determination in boundary element method analysis[J]. Engineering fracture mechanics,2003,70(15):2247-2252.
[7] NEJATI M,PALUSZNY A,ZIMMERMAN R W. On the use of quarter-point tetrahedral finite elements in linear elastic fracture mechanics[J]. Engineering fracture mechanics,2015,144:194-221.
[8] FAGEEHI Y A,ALSHOAIBI A M. Nonplanar crack growth simulation of multiple cracks using finite element method[J]. Advances in materials science and engineering,2020,2020(1):8379695.
[9] HERRMANN L R. Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem[J]. AIAA journal,1965,3(10):1896-1900.
[10] 荣廷玉. 弹性力学广义混合变分原理及有限元广义混合法[J]. 固体力学学报,1988,9(2):153-164.
RONG Tingyu. Generalized mixed variational principles in elasticity and the finite element method[J]. Chinese journal of solid mechanics,1988,9(2):153-164(in Chinese).
[11] 党发宁,荣廷玉,孙训方. 用有限元广义混合法分析不可压缩或几乎不可压缩弹性体[J]. 力学季刊,2000,21(3):299-303.
DANG Faning,RONG Tingyu,SUN Xunfang. Application of generalized mixed finite element method to research on incompressible and nearly incompressible elasticity[J]. Chinese quarterly of mechanics,2000,21(3):299-303(in Chinese).
[12] QING G H,MAO J H,LIU Y H. Generalized mixed finite element method for 3D elasticity problems[J]. Acta mechanica Sinica,2018,34(2):371-380.
[13] QING G H,TIAN J. Highly accurate symplectic element based on two variational principles[J]. Acta mechanica Sinica,2018,34(1):151-161.
[14] FELIPPA C A. Parametrized multifield variational principles in elasticity:I. Mixed functionals[J]. Communications in applied numerical methods,1989,5(2):79-88.
[15] 朱伯芳. 有限元法原理与应用[M]. 北京:中国水利水电出版社,2018.
[16] 中国航空研究院. 应力强度因子手册[M]. 北京:科学出版社,1981
[17] MURAKAMI Y,KEER L M. Stress intensity factors handbook[M]. New York:Pergamon,1987.
[18] 解德,钱勤,李长安. 断裂力学中的数值计算方法及工程应用[M]. 北京:科学出版社,2009.

(编辑 吕茵)

